

Kolokwium 2/2

Zadanie 1 (4 pkt). Niech A, B, C i D będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio: $N(1, 2)$, $N(3, 4)$, $N(5, 6)$ i $N(7, 8)$. Niech $X = 4A + D$ i $Y = 2B + C$.

- (i) (2 pkt) Oblicz $P(X \geq Y)$.
- (ii) (2 pkt) Która z wartości jest większa: $P(X \geq 1)$ czy $P(Y \geq 1)$?

Zadanie 2 (4 pkt). Na nieskończoną szachownicę złożoną z kwadratowych pól 1×1 rzucamy igłą o długości 1.

- (i) (2 pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo, że oba końce igły są w czarnym polu?
- (ii) (2 pkt) Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej określającej liczbę białych pól, na których leży igła.

Zadanie 3 (4 pkt). Niech $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem 1. Dla każdego $t > 0$, proces jest *najedzony* w chwili t jeśli zaszło zdarzenie $N(t) - t > 1$. Mówimy, że proces się *najada* w chwili t jeśli t jest najmniejszą dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że proces jest najedzony w chwili t . Niech T będzie zmienną losową oznaczającą moment najedzenia procesu. Oblicz:

- (i) (1.5 pkt) $P(T > 2)$,
- (ii) (1.5 pkt) $P(T > 2 \mid N(3) = 4)$,
- (iii) (1 pkt) $P(T > 2026 \mid N(2025) = 2024, T > 2025)$.

Zadanie 4 (4 pkt). Łamiemy jednometrowy kij w dwu losowych punktach X i Y wybranych niezależnie i jednostajnie po całym kiju. Niech Z będzie długością otrzymanego kawałka, który ma końce w punktach łamania.

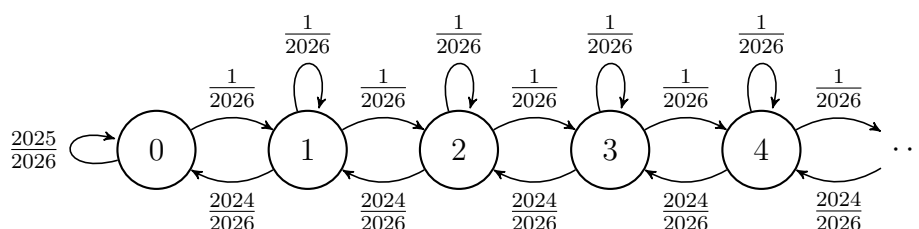
- (i) (2 pkt) Podaj gęstość Z oraz oblicz $E(Z)$.
- (ii) (2 pkt) Oblicz $E(Z \mid \min(X, Y))$.

Zadanie 5 (4 pkt). Rozważ okrąg o promieniu R , gdzie $R = R_1 + R_2$ i R_1, R_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Losujemy niezależnie i jednostajnie dwa punkty na tym okręgu. Wylosowane punkty wraz ze środkiem okręgu tworzą trójkąt. Jaka jest wartość oczekiwana pola tego trójkąta?

Zadanie 6 (4 pkt). Rozważ klasyczną talię 52 kart. Mamy 13 kart w ręce. W jednym kroku losujemy jedną kartę z pozostałych 39 kart i zamieniamy ją z losowo wybraną kartą z ręki. Niech X_n oznacza zbiór 13 kart w ręce, które mamy po n krokach. Wyznacz szansę, że w losowej chwili w przyszłości mamy identyczną rękę jak na początku, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = \text{„startowa ręka”})$.

Zadanie 7 (4 pkt). Rozważ zawody, w których celem jest jak najdłuższe utrzymanie się na ogromnej kłodzie wprowadzonej w ruch obrotowy. W zawodach bierze udział 2026 uczestników, a każdy z nich utrzymuje się na kłodzie niezależnie od pozostałych przez okres będący zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Jednak dla każdego $i \in [2025]$ w momencie, gdy odpada i -ty zawodnik (czyli na kłodzie pozostaje $2026 - i$ zawodników), kłoda zaczyna się obracać szybciej i od tej pory czas utrzymania się każdego zawodnika ma rozkład wykładniczy z parametrem i . Zawody kończą się gdy na kłodzie jest już tylko jeden zawodnik. Wyznacz oczekiwany czas trwania zawodów.

Zadanie 8 (4 pkt). Rozważ spacer losowy po liczbach naturalnych przedstawiony na poniższym rysunku. Niech X oznacza liczbę kroków w tym spacerze do pierwszego uderzenia w 0 pod warunkiem, że zaczynamy w 1. Oblicz $E(X)$ oraz $\text{Var}[X]$.



Zadanie 9 (4 pkt). Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrami $(0, 1)$.

- (i) (1 pkt) Podaj rozkład $\arctan X$.
- (ii) (1 pkt) Oblicz $E\left(X \mid \frac{\sqrt{3}}{3} \leq X \leq \sqrt{3}\right)$.
- (iii) (1 pkt) Oblicz $E(X \mid X + Y)$.
- (iv) (1 pkt) Podaj rozkład $\frac{1-X}{1+X}$.

Zadanie 10 (4 pkt). Rozważ graf na $n^2 + 1$ wierzchołkach otrzymany z n rozłącznych ścieżek, każda na n wierzchołkach oraz jednego dodatkowego wierzchołka v sąsiadującego z jednym końcem każdej z n ścieżek (niżej rysunek dla $n = 4$). Jaka jest asymptotyka oczekiwanego czasu pokrycia grafu, startując z v ? Podaj najlepsze, jakie umiesz, ograniczenia górne i dolne.

