

Kolokwium 2/2 (Poprawione)

Wyniki zadań można podawać używając dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego oznaczanej przez Φ . Można przyjąć, że $\Phi(1.7) = 0.95$ i $\Phi(2) - \Phi(-2) = 0.95$.

Zmienna o rozkładzie $N(\alpha, \beta)$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną α i wariancją β .

Dla przypomnienia, kiedy rzucamy igłą długości jeden na płaszczyznę z równoległymi liniami narysowanymi w odstępach o jeden, to prawdopodobieństwo, że igła przetnie linię wynosi $\frac{2}{\pi}$.

Zadanie 1. Niech $\lambda > 0$. Rozważmy dwie zmienne losowe X i Y o wspólnej gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{jeśli } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

- (i) (1 pkt) Wyznacz gęstość Y pod warunkiem X .
- (ii) (1 pkt) Wyznacz wartość oczekiwaną Y pod warunkiem X .
- (iii) (1 pkt) Ile wynosi $P(X < Y)$? Ile wynosi $P(2X < Y)$?

Zadanie 2 (4 pkt). Niech K będzie kołem o promieniu 1. Losujemy jednostajnie niezależnie dwa punkty A i B w K . Następnie, rysujemy koło L o środku w A takie, że B leży na brzegu L . Jakie jest prawdopodobieństwo, że L zawiera się w K ?

Zadanie 3 (4 pkt). Łamiemy jednometrowy kij w losowym punkcie wybranym jednostajnie. Następnie bierzemy dłuższy z powstałych kawałków kija i ponownie łamiemy go w losowym punkcie wybranym jednostajnie. Jaka jest oczekiwana długość najkrótszego z trzech powstałych kawałków?

Zadanie 4 (4 pkt). Płaszczyzna jest podzielona poziomymi i pionowymi liniami tworzącymi kratkę złożoną z kwadratów 1×1 . Rzucamy na płaszczyznę jednostajnie igłę długości 1. Jaka jest szansa, że igła przetnie zarówno linię poziomą jak i linię pionową? Korzystając z wyniku, oblicz wariancję zmiennej losowej zliczającej liczbę przecięć igły z kratką.

Zadanie 5. Dane są dwa procesory P1 i P2 oraz 2025 zadań ponumerowanych liczbami ze zbioru $\{1, \dots, 2025\}$. Procesor P1, odpowiednio P2, przetwarza dowolne z tych zadań w czasie będącym zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2025, odpowiednio 1. Wszystkie czasy przetwarzania są niezależne. Rozważ proces losowy, w którym zadanie 1 jest przydzielone do P1, zadanie 2 jest przydzielone do P2. Kiedy zadanie zostanie wykonane, procesor natychmiast przyjmuje pierwsze wolne zadanie, a w przypadku gdy nie ma takiego zadania, to kończy działanie.

- (i) (1 pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo, że P2 wykona więcej niż jedno zadanie?
- (ii) (1 pkt) Jaka jest oczekiwana liczba zadań wykonanych na P2?
- (iii) (1 pkt) Z jakim prawdopodobieństwem zadanie 2024 zostanie wykonane na P1?
- (iv) (1 pkt) Z jakim prawdopodobieństwem zadanie 1000 zostanie wykonane jako ostatnie na P2?

- (v) (1 pkt) Zakładając, że P2 wykonał dokładnie trzy zadania, jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonał zadanie o numerze większym niż 2000?

Zadanie 6. Niech $\lambda > 0$. Rozważ dwie niezależne zmienne losowe X i Y o rozkładach $\Gamma(2, \lambda)$ i $\Gamma(3, \lambda)$ odpowiednio. Niech $Z = X + Y$.

- (i) (1,5 pkt) Wyznacz $E(Z|X)$.
(ii) (1,5 pkt) Wyznacz $E(X|Z)$.

Zadanie 7. Niech $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ . Każde zdarzenie zliczane przez ten proces jest kolorowane niezależnie na jeden z dwóch kolorów: czerwony lub niebieski; szansa, że dane zdarzenie jest czerwone to $\frac{1}{3}$.

- (i) (1 pkt) Z jakim prawdopodobieństwem w przedziale $[10, 20]$ wydarzyło się dokładnie 5 niebieskich zdarzeń?
(ii) (1 pkt) Jeśli w przedziale $[10, 20]$ wydarzyło się dokładnie 5 niebieskich i 2 czerwone zdarzenia, to z jakim prawdopodobieństwem pierwsze zdarzenie w procesie jest niebieskie?
(iii) (2 pkt) Jeśli w przedziale $[0, 10]$ wydarzyły się dokładnie 3 niebieskie zdarzenia, to z jakim prawdopodobieństwem pierwsze zdarzenie w procesie jest niebieskie?

Zadanie 8. Niech X , Y i Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $N(0, 3)$, $N(2, 1)$ i $N(0, 1)$ odpowiednio.

- (i) (2 pkt) Ile wynosi $P(X > Y)$?
(ii) (2 pkt) Ile wynosi $E(\max(Z - 2025, 0))$?

Zadanie 9. Rozważmy okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$. Niech C będzie półokręgiem zawartym w górnej półpłaszczyźnie. Losujemy jednostajnie punkt (X, Y) w C .

- (i) (1 pkt) Wyznacz $E(Y)$.
(ii) (1 pkt) Wyznacz $E(X/Y)$.
(iii) (1 pkt) Wyznacz $E(X/Y \mid 0 < X)$.
(iv) (1 pkt) Wyznacz $E(X/Y \mid 0 < X < Y)$.
(v) (1 pkt) Wyznacz $E(X/Y \mid Y < X)$.

Zadanie 10 (4 pkt). Wskaż, jak można wykorzystać eksperyment, w którym rzucamy n razy igłą długości 1 na płaszczyznę z równoległymi liniami narysowanymi w odstępach o jeden, do wyznaczenia wartości $\frac{1}{\pi}$. Jak duże powinno być n , aby z prawdopodobieństwem 0,95 nasze oszacowanie było z dokładnością do 0,01? Skorzystaj z centralnego twierdzenia granicznego.

Powodzenia.