Kolokwium 1/2

Zadanie 1 (`3 pkt`)**.** Święty Mikołaj zatrudnia $A+B$ elfów. Spośród nich A to chłopcy, a B to dziewczynki. Załóżmy, że $A+B$ jest parzyste. Święty Mikołaj rozdzielił losowo elfy na pary. Podaj wartość oczekiwaną liczby par, w których są dwie dziewczynki.

Zadanie 2 (`4 pkt`)**.** Tasujemy talię rozróżnialnych kart. W talii mamy B białych kart i C czarnych kart. Niech r będzie ustaloną liczbą taką, że $1 \leqslant r \leqslant C$. Wykładamy karty dopóki nie odkryjemy r czarnych kart. Niech X będzie liczbą odkrytych białych kart. Jaki rozkład ma X? Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja X?

Zadanie 3 (`3 pkt`)**.** Czy istnieje algebra mająca 2023 elementy? Jeśli tak to podaj konstrukcję, jeśli nie to podaj formalny dowód.

Zadanie 4. Niech Ω będzie dowolnym zbiorem, niech Σ będzie σ-algebrą na tym zbiorze i niech μ będzie miarą na (Ω, Σ). Niech Σ' będzie dowolną σ-algebrą na $\mathbb{R}$. Niech $f : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \Sigma')$ będzie funkcją mierzalną i niech $E \in \Sigma$. Udowodnij, że

(i) (`2 pkt`) funkcja $\chi_E \cdot f : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \Sigma')$ jest mierzalna, gdzie $\chi_E(x) = 1$ jeśli $x \in E$ i $\chi_E(x) = 0$ jeśli $x \notin E$;

(ii) (`2 pkt`) $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \chi_E \cdot f \, \mathrm{d}\mu$.

Zadanie 5 (`3 pkt`)**.** Udowodnij, że dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje turniej (graf skierowany pełny) na n wierzchołkach , który ma co najmniej $\frac{n!}{2^{n-1}}$ ścieżek Hamiltona. Wskazówka: metoda probabilistyczna.

Zadanie 6 (`4 pkt`)**.** Niech X będzie zmienną losową liczącą liczbę kopii kliki K_4 na czterech wierzchołkach w grafie wylosowanym z modelu $G_{n,p}$ (to znaczy, mając $n \geqslant 4$ wierzchołków dla każdej pary wierzchołków losujemy niezależnie z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$, czy są połączone krawędzią, czy nie). Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X.

Zadanie 7. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu geometrycznego z parametrem $\frac{1}{2}$. Niech $X = \sum_{i=1}^n X_i$ i $\delta > 0$.

(i) (`1.5 pkt`) Wyprowadź ograniczenie Chernoffa na $\mathbb{P}(X \geqslant (1+\delta)(2n))$ poprzez aplikację znanego z wykładu ograniczenia Chernoffa do ciągu $(1+\delta)(2n)$ rzutów symetryczną monetą.

(ii) (`2 pkt`) Wyprowadź bezpośrednio ograniczenie Chernoffa na $\mathbb{P}(X \geqslant (1+\delta)(2n))$ korzystając z momentów rozkładu geometrycznego. Co sądzisz o tym ograniczeniu?

Zadanie 8. Dostaliśmy od Świętego Mikołaja B białych kul, gdzie B jest zmienną o rozkładzie Poissona z parametrem 2023. Każda kula z prawdopobieństwem p $(0 < p < 1)$ jest pomalowana na czerwono niezależnie od innych kul. Niech C będzie zmienną losową oznaczającą liczbę czerwonych kul w tym momencie. Każda czerwona kula z prawdopobieństwem p jest pomalowana na niebiesko niezależnie od innych kul. Niech D będzie zmienną losową oznaczającą liczbę niebieskich kul w tym momencie. Każda niebieska kula z prawdopobieństwem p jest pomalowana na żółto niezależnie od innych kul. Niech E będzie zmienną losową oznaczającą liczbę żółtych kul w tym momencie.

(i) (`1.5 pkt`) Dla $p = \sqrt[3]{1 - \frac{\ln 3}{2023}}$ sprawdź, czy wartość $\mathbb{P}(B > E)$ jest większa, mniejsza, czy równa $\frac{2}{3}$.
(ii) (`1.5 pkt`) Dla jakiego p, wartość oczekiwana E jest równa 1?
(iii) (`1.5 pkt`) Znajdź $\mathbb{E}(E \mid B)$ i $\mathbb{E}(B \mid E)$.

Zadanie 9. Rozważmy cykl na n wierzchołkach. Startujemy w dowolnym wierzchołku. W każdym kroku z równym prawdopodobieństwem przechodzimy do jednego z sąsiadów. Jaka jest (asymptotycznie względem n) wartość oczekiwana liczby kroków do odwiedzenia wszystkich wierzchołków cyklu.

(i) (`1.5 pkt`) Ograniczenie górne.
(ii) (`1.5 pkt`) Ograniczenie dolne.
(iii) (`1 pkt`) A co jeżeli w każdym kroku z równym prawdopodobieństwem ($\frac{1}{3}$) zostajemy lub przechodzimy do jednego z sąsiadów?

Zadanie 10. Rozważmy następującą grę, w której chodzimy po liczbach całkowitych nieujemnych. Zaczynamy w 0. W każdym kroku rzucamy sześcienną kostką. Załóżmy, że w danym momencie jesteśmy w x i wyrzuciliśmy wynik y na kostce. (Czyli x jest liczbą całkowitą nieujemną, a $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.) Niech k będzie taką liczbą całkowitą, że $6k \leqslant x < 6(k + 1)$.

* Jeśli $x + y < 6(k + 1)$ to przesuwamy się na $x + y$.
* Jeśli $x + y = 6(k + 1)$ to przesuwamy się na $6k$.
* Jeśli $x + y > 6(k + 1)$ to przesuwamy się na $6(k + 1) + 1$.

(i) (`2 pkt`) Oblicz wartość oczekiwaną liczby kroków potrzebnych do osiągnięcia wyniku 7 po raz pierwszy.
(ii) (`0.5 pkt`) Oblicz wartość oczekiwaną liczby kroków potrzebnych do osiągnięcia wyniku 37 po raz pierwszy.

Teraz rozważmy następującą modyfikację zasad.

* Jeśli $x + y < 6(k + 1)$ to przesuwamy się na $x + y$.
* Jeśli $x + y = 6(k + 1)$ to przesuwamy się na $6k$, chyba, że $6(k + 1) = 36$, wtedy wygrywamy.
* Jeśli $x + y > 6(k + 1)$ to przesuwamy się na $6(k + 1) + 1$, chyba, że $6(k + 1) = 36$, wtedy przesuwamy się na 0.

(iii) (`1.5 pkt`) Oblicz wartość oczekiwaną liczby kroków potrzebnych do wygrania zmodyfikowanej gry.

Zadanie 11 (`3 pkt`)**.** Czy istnieje łańcuch Markova, który ma w jednej klasie skomunikowania stan null-rekurencyjny i stan pozytywnie rekurencyjny? Jeśli tak to podaj konstrukcję, jeśli nie to podaj formalny dowód.

Powodzenia.