

Aksjomaty, niezależność, wartość oczekiwana

Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych

$\mathcal{F}$ - σ -ciało nad Ω

Miara probabilistyczna P na $(\Omega, \mathcal{F})$ jest funkcją $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ taką, że

* $P(\Omega) = 1$,

* jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych, to $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy *przestrzenią probabilistyczną*.

Zadanie 1. Wyprowadź z aksjomatów kolejne własności przestrzeni probabilistycznej:

(i) $P(\emptyset) = 0$,

(ii) $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$,

(iii) jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,

(iv) jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leq P(B)$,

(v) $P(A) \leq 1$,

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Zadanie 2. Jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$, to

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zdarzeń, czyli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$, to

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_0, A_1, \dots$ zachodzi

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n).$$

Zadanie 4. Niech $A_0, A_1, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń i niech $P(A_n) = 1$ dla każdego n . Udowodnij, że $P(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = 1$.

Zadanie 5. Podaj przykład zdarzeń X, Y, Z , takich że każde dwa są niezależne, ale cała trójka nie jest niezależna.

Podaj przykład $n + 1$ zdarzeń takich, że każde n z nich są niezależne, ale wszystkie $n + 1$ są zależne.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne, to zdarzenia $\Omega \setminus A_1, \dots, \Omega \setminus A_n$ także są.

Zadanie 7. Niech $A_0, A_1, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem zdarzeń i niech $P(\Omega \setminus A_n) \leq \frac{1}{3^n}$ dla każdego n . Uzasadnij, że

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Zadanie 8. Niech $q \in \{0, 1\}^{19}$ będzie arbitralnie wybranym 19-elementowym ciągiem zer i jedynek. Rzucamy wielokrotnie symetryczną monetą (tj. taką że orzeł i reszka wypadają z jednakowym prawdopodobieństwem) i notujemy rezultaty tworząc w ten sposób ciąg. Jeśli wypadł orzeł notujemy 0, jeśli reszka 1. Jakie jest prawdopodobieństwo że ciąg q wystąpi (po być może wielu rzutach) jako spójny podciąg notowanego ciągu?

Zadanie 9 (Spacer losowy z dwiema barierami). Startujemy doświadczenie z liczbą k ($0 \leq k \leq n$). Barrierami są liczby 0 i n . Dopóki aktualna liczba nie jest jedną z barier do aktualnej liczby dodajemy 1 lub -1 z równym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w którąś z barier? Jakie jest prawdopodobieństwo, że spacer uderzy w n ?

Zadanie 10. W urnie znajdują się dwie kule: jedna czarna i jedna biała. W każdej z $n - 2$ rund losujemy w sposób jednostajny jedną kulę z urny i dokładamy do urny kulę o tym samym kolorze co wylosowana. Pokaż, że liczba białych kul w urnie na końcu jest z jednakowym prawdopodobieństwem jedną z liczb ze zbioru $[n - 1]$.

Zadanie 11 (Bratobójczy pojedynek). Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze walczą w systemie turniejowym (jakże by inaczej?). Uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Drabinka turnieju jest układana losowo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się w pojedynku?

Zadanie 12. Dana jest moneta asymetryczna, która z nieznanym Ci prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$ zwraca orła i z prawdopodobieństwem $1 - p$ zwraca reszkę. Zaproponuj algorytm który będzie symulował zachowanie monety symetrycznej, tj. z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zwróci orła bądź reszkę. Jedyne co możesz robić to rzucać monetą asymetryczną i na bazie obserwowanych rezultatów kontynuować rzucanie, bądź przerwać i zwrócić wynik. Jaka jest oczekiwana liczba rzutów monetą asymetryczną przed zwróceniem wyniku? Wynik podaj jako funkcję p .

Liniowość wartości oczekiwanej

Zadanie 13. Każdy z n graczy rzuca niezależnie od pozostałych kostką.

- (i) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje 1 punkt. Znajdź wartość oczekiwaną.
- (ii) Za dowolną parę graczy którzy wyrzucili ten sam wynik grupa dostaje tyle punktów ile wyrzucili. Znajdź wartość oczekiwaną.

Zadanie 14. Niech π będzie losową permutacją zbioru $[n]$. Punkt stały permutacji π to taki x , że $\pi(x) = x$. Wyznacz oczekiwaną liczbę punktów stałych permutacji π .

Zadanie 15. Inwersja w permutacji π to para indeksów $i < j$ taka że $\pi(i) > \pi(j)$. Wyznacz oczekiwaną liczbę inwersji losowej permutacji π zbioru $[n]$.

Zadanie 16. n osób ($n \geq 4$) usiadło formując okrąg. Każda osoba w sposób losowy wybrała sąsiada. Jaka jest oczekiwana liczba osób niewybranych przez nikogo? A jaka jest odpowiedź jeśli te osoby siedzą w linii (czyli skrajne osoby mają tylko jednego sąsiada)?