Metoda Monte Carlo

czyli od próbkowania do wyników

Metody Probabilistyczne Informatyki 2023/24

Uniwersytet Jagielloński, TCS

Jędrzej Hodor, Piotr Micek

$\pi = 3,141592653589\ldots$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

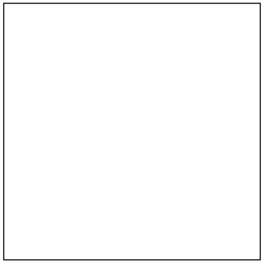
Spróbujmy zatem przybliżyć!

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2

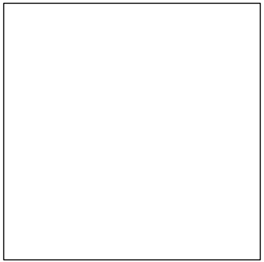


$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



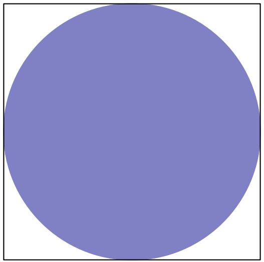
$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



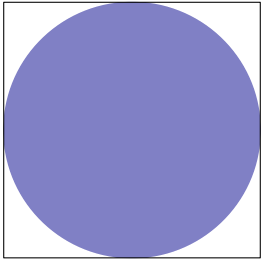
$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

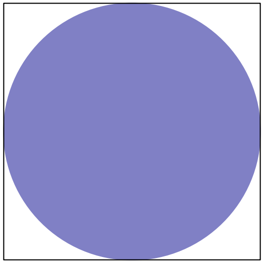
$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

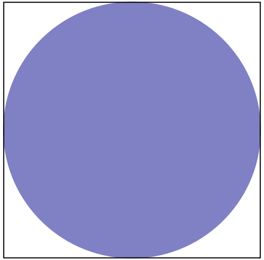
$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

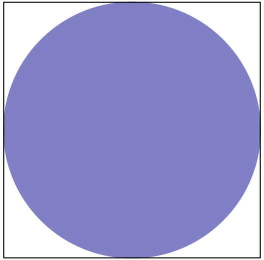
$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

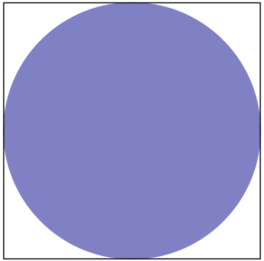
$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

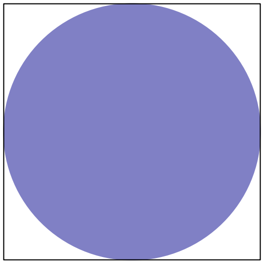
$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

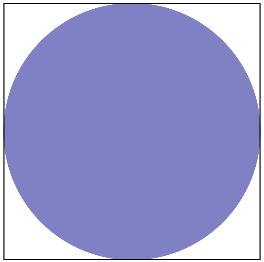
$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

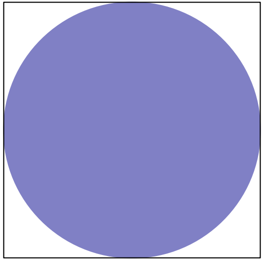
$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

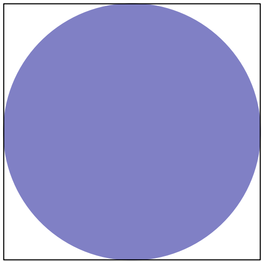
Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

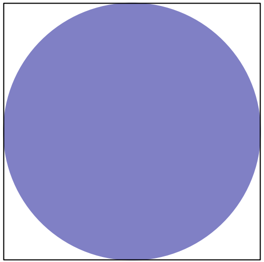
Definicja:

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

Definicja:

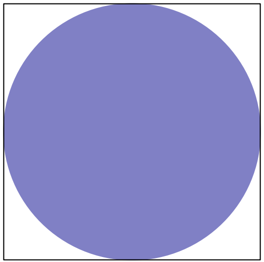
Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1,1]$

$Z = [\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z=1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

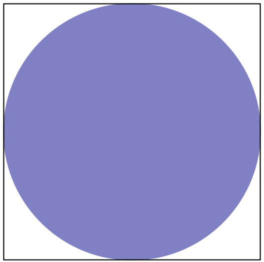
$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Czyli, żeby otrzymać (ε, δ) aproksymacje wartości π dla pewnych ε, δ musimy zapewnić, że

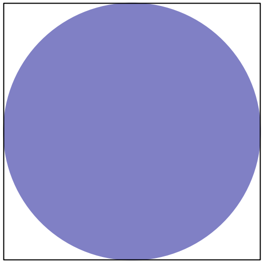
$$2e^{-m\pi\varepsilon^2/12} \leqslant \delta$$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Czyli, żeby otrzymać (ε, δ) aproksymacje wartości π dla pewnych ε, δ musimy zapewnić, że

$$2e^{-m\pi\varepsilon^2/12} \leqslant \delta$$

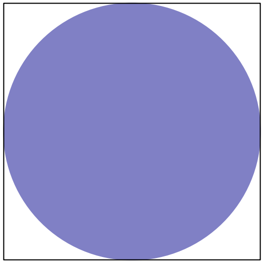
Innymi słowy trzeba wykonać dużo powtórzeń

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\rightarrow$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Czyli, żeby otrzymać (ε, δ) aproksymacje wartości π dla pewnych ε, δ musimy zapewnić, że

$$2e^{-m\pi\varepsilon^2/12} \leqslant \delta$$

Innymi słowy trzeba wykonać dużo powtórzeń

Dokładniej, potrzebujemy

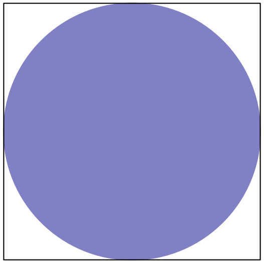
$$m \geqslant \frac{12 \ln(2/\delta)}{\pi\varepsilon^2}$$

$\pi = 3,141592653589\ldots$

Liczba niewymierna $\to$ nie da się dokładnie obliczyć.

Spróbujmy zatem przybliżyć!

Losujemy punkt w kwardacie 2×2



$X, Y \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$

$Z = [\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant 1]$

$\mathrm{P}(Z = 1) = \frac{\text{pole koła}}{\text{pole kwadratu}} = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{E}(Z) = \frac{\pi}{4}$

Powtórzmy eksperyment wiele razy (m razy)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$

$W = \sum_{i=1}^{m} Z_i$

$\mathrm{E}(W) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(Z_i) = \frac{m\pi}{4}$

$W' = \frac{4}{m} W$ to naturalne oszacowanie na π

Z Chernoffa mamy: $\mathrm{P}(|W' - \pi| \geqslant \varepsilon\pi) \leqslant 2e^{-m\pi\varepsilon^2/12}$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Czyli, żeby otrzymać (ε, δ) aproksymacje wartości π dla pewnych ε, δ musimy zapewnić, że

$$2e^{-m\pi\varepsilon^2/12} \leqslant \delta$$

Innymi słowy trzeba wykonać dużo powtórzeń

Dokładniej, potrzebujemy

$$m \geqslant \frac{12 \ln(2/\delta)}{\pi\varepsilon^2}$$

Aby otrzymać k miejsc po przecinku π z pewnością 95% trzeba powtórzyć eksperyment mniej więcej $15 \cdot 10^{2k}$ razy.

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3 \ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS)

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3 \ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$
3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$
3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(x)\varepsilon^2$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$
3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(x)\varepsilon^2$

   na pewno wielomianowe od $1/\varepsilon$ i $\ln(1/\delta)$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$
3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje
   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(x)\varepsilon^2$
   na pewno wielomianowe od $1/\varepsilon$ i $\ln(1/\delta)$
4. czy $1/R(x)$ jest wielomianowe od $|x|$?

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$
3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje
   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(x)\varepsilon^2$
   na pewno wielomianowe od $1/\varepsilon$ i $\ln(1/\delta)$
4. czy $1/R(x)$ jest wielomianowe od $|x|$?
5. zwracamy aproksymacje: $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \sim R(x)$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ daje (ε, δ)-aproksymacje dla μ.

Innymi słowy $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Trudne problemy obliczeniowe

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to R(x)$, mówimy, że mamy a *fully polynomial randomized approximation scheme* (FPRAS) jeśli dla wejścia x i parametrów ε, δ umiemy generować (ε, δ)-aproksymacje $R(x)$ w czasie wielomianowym od $|x|, 1/\varepsilon, \ln(1/\delta)$.

$$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)\text{-aproksymacja } R(x)$$

Uwaga: równoważnie wystarczy $(\varepsilon, 1/4)$-aproksymacja

Metoda Monte Carlo

problem $x \to R(x)$

chemy FPRAS

dane: x, ε, δ

przykłady...

1. projektujemy zmienną losową X, że $\mathrm{E}(X) = R(x)$
2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$
3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(x)\varepsilon^2$

   na pewno wielomianowe od $1/\varepsilon$ i $\ln(1/\delta)$
4. czy $1/R(x)$ jest wielomianowe od $|x|$?
5. zwracamy aproksymacje: $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \sim R(x)$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie:

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

dlatego szukamy aproksymacji.

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

dlatego szukamy aproksymacji.

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

X = [wartościowanie spełnia F]

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

X = [wartościowanie spełnia F]

$\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

   X = [wartościowanie spełnia F]

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

   $X =$ [wartościowanie spełnia F]

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(F)\varepsilon^2$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

   X = [wartościowanie spełnia F]

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(F)\varepsilon^2$

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n$?

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

   X = [wartościowanie spełnia F]

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/R(F)\varepsilon^2$

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n$?

   $1/R(F) = 2^n/C(F)$

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

   X = [wartościowanie spełnia F]

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3 \ln(2/\delta)/R(F)\varepsilon^2$

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n$?

   $1/R(F) = 2^n/C(F)$

Jeśli $C(F) = 2^n/\mathrm{poly}(n)$ to jest dobrze.

The DNF Counting Problem

Zliczanie wartościowań spełniających formuły boolowskie

DNF = disjunctive normal form

$$\underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)}_{\text{klauzula}} \vee (\overline{x_1} \wedge \underbrace{x_3}_{\text{literał}}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_5)$$

Bardzo łatwo sprawdzić, czy spełnialna:

Czy istnieje klauzula bez $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$?

Pytanie: Ile jest wartościowań spełniających?

Jest to problem trudny

(istnienie wielomianowego algorytmu implikuje P=NP)

(prosta redukcja z SAT)

dlatego szukamy aproksymacji.

Podejście naiwne:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$C(F)$ = liczba spełniających wartościowań

$R(F) = \frac{C(F)}{2^n}$

1. losujemy wartościowanie n zmiennych jednostajnie

   X = [wartościowanie spełnia F]

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{C(F)}{2^n} = R(F)$

2. powtarzamy wiele razy: $X_1, \ldots, X_m$

3. tak wiele, aby Tw. dało (ε, δ)-aproksymacje

   czyli $m \geqslant 3 \ln(2/\delta)/R(F)\varepsilon^2$

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n$?

   $1/R(F) = 2^n/C(F)$

Jeśli $C(F) = 2^n/\mathrm{poly}(n)$ to jest dobrze.

Jeśli $C(F)$ jest mniejsze

(np. $C(F) \sim \mathrm{poly}(n)$) to mamy problem.

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i \; C_i$ prawdziwe

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i \; C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i \; C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

!!$C(F) \leqslant |S|$!!

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a, i) z S

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\dots x \wedge \overline{x} \dots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

!!$C(F) \leqslant |S|$!!

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. $\dots$ 3. $\dots$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i, a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$$

1. losujemy jednostajnie element (a, i) z S

   $X = [(a, i) \in R]$

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^t |SC_i| = \sum_{i=1}^t 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^t SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\dots x \wedge \overline{x} \dots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

!!$C(F) \leqslant |S|$!!

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$– łatwo sprawdzić

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. $\ldots$ 3. $\ldots$

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$ – łatwo sprawdzić

Jednostajnie??

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

JAK?

$\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$– łatwo sprawdzić

Jednostajnie??

Niech $(a,i) \in S$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$– łatwo sprawdzić

Jednostajnie??

Niech $(a,i) \in S$

P(wybrano (a,i))

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   JAK?

   $E(X) = P(X = 1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$– łatwo sprawdzić

Jednostajnie??

Niech $(a,i) \in S$

P(wybrano (a,i))

$= P(\text{wybrano } i) P(\text{wybrano } a \mid \text{wybrano } i)$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

n = liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

SC_i = wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F)$ = liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

!!$C(F) \leqslant |S|$!!

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$– łatwo sprawdzić

Jednostajnie??

Niech $(a,i) \in S$

P(wybrano (a,i))

$= \mathrm{P}(\text{wybrano } i)\mathrm{P}(\text{wybrano } a \mid \text{wybrano } i)$

$= \frac{|SC_i|}{|S|} \frac{1}{|SC_i|} = \frac{1}{|S|}$

Podejście lepsze:

dane: F-formuła DNF, ε, δ

$n =$ liczba zmiennych w F

$F = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_t$

F prawdziwe $\Leftrightarrow \exists_i\ C_i$ prawdziwe

Zakładamy, że w klauzulach nie ma $\ldots x \wedge \overline{x} \ldots$.

C_i ma ℓ_i literałów (czyli ℓ_i zmiennych)

dokładnie $2^{n-\ell_i}$ wartościowań spełnia C_i

$SC_i =$ wartościowania spełniające C_i

$S = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in SC_i\}$

$|S| = \sum_{i=1}^{t} |SC_i| = \sum_{i=1}^{t} 2^{n-\ell_i}$

$C(F) =$ liczba sp. wart. $= |\bigcup_{i=1}^{t} SC_i|$

$!!C(F) \leqslant |S|!!$

$RC_i = SC_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} SC_j$

$R = \{(i,a) \mid i \in [t], a \in RC_i\}$

$C(F) = |R|$

$R(F) = \frac{C(F)}{|S|} = \frac{|R|}{|S|}$

1. losujemy jednostajnie element (a,i) z S

   $X = [(a,i) \in R]$

   JAK?

   $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X=1) = \frac{|R|}{|S|} = R(F)$

2. … 3. …

4. czy $1/R(F)$ jest wielomianowe od $|F| \sim n, t$?

   $1/R(F) = |S|/|R| \leqslant t$

Z prawdopodobieństwem $\frac{|SC_i|}{|S|}$ wybierz $i \in [t]$

dla wylosowanego i

wybierz jednostajnie wartościowanie a z SC_i

$X = [a \in RC_i]$– łatwo sprawdzić

Jednostajnie??

Niech $(a,i) \in S$

$\mathrm{P}(\text{wybrano } (a,i))$

$= \mathrm{P}(\text{wybrano } i)\mathrm{P}(\text{wybrano } a \mid \text{wybrano } i)$

$= \frac{|SC_i|}{|S|} \frac{1}{|SC_i|} = \frac{1}{|S|}$

Dostaliśmy FPRAS dla DNF Counting!

Moc próbkowania

Definicja:

Moc próbkowania

Definicja:

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \tfrac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \tfrac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \tfrac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny
$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:

U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \tfrac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:

U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)
na skończonej przestrzeni Ω
daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli
dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,
gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy
a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)
jeśli dla wejścia x i parametru ε
umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$
w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \tfrac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:

U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$

w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

$x \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(x)$

Moc próbkowania

Sampling $\to$ Counting

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \tfrac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:

U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$

w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

$x \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(x)$

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny
$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$

w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

$x \xrightarrow{\text{poly}}$ ε-jednostajna próbka $\Omega(x)$

Sampling $\to$ Counting

Wejście: graf G

Pytanie: Ile jest zbiorów niezależnych w G?

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$

w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

$x \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(x)$

Sampling $\to$ Counting

Wejście: graf G

Pytanie: Ile jest zbiorów niezależnych w G?

$\Omega(G)$ = zbiory niezależnych w G

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)
na skończonej przestrzeni Ω
daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli
dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,
gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy
a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)
jeśli dla wejścia x i parametru ε
umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$
w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

$x \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(x)$

Sampling $\to$ Counting

Wejście: graf G

Pytanie: Ile jest zbiorów niezależnych w G?

$\Omega(G)$ = zbiory niezależnych w G

Najpierw założymy, że mamy FPAUS.

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)
na skończonej przestrzeni Ω
daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli
dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,
gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy
a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)
jeśli dla wejścia x i parametru ε
umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$
w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

Sampling → Counting

Wejście: graf G

Pytanie: Ile jest zbiorów niezależnych w G?

$\Omega(G)$ = zbiory niezależnych w G

Najpierw założymy, że mamy FPAUS.
Pokażemy jak zrobić FPRAS.

$x \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(x)$

$x \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(x)|$

FPAUS (approx. sampling) → FPRAS (approx. counting)

Moc próbkowania

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm)

na skończonej przestrzeni Ω

daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli

dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

inaczej:
U jednostajny

$$\|\mathrm{P}_X - U\|_{TV} \leqslant \varepsilon$$

Definicja:

Mając dany problem obliczeniowy $x \to \Omega(x)$,

gdzie $\Omega(x)$ to (duży) zbiór rozwiązań mówimy, że mamy

a *fully polynomial almost uniform sampler* (FPAUS)

jeśli dla wejścia x i parametru ε

umiemy generować ε-jednostajną próbkę $\Omega(x)$

w czasie wielomianowym od $|x|, \ln(1/\varepsilon)$.

Sampling → Counting

Wejście: graf G

Pytanie: Ile jest zbiorów niezależnych w G?

$\Omega(G)$ = zbiory niezależnych w G

Najpierw założymy, że mamy FPAUS.

Pokażemy jak zrobić FPRAS.

Na końcu wykładu pokażemy jak zrobić FPAUS w pewnym szczególnym przypadku.

$x \xrightarrow{\text{poly}}$ ε-jednostajna próbka $\Omega(x)$

$x \xrightarrow{\text{poly}}$ (ε, δ)-aproksymacja $|\Omega(x)|$

FPAUS (approx. sampling) → FPRAS (approx. counting)

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G
$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymację* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymację* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$

$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$

$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$

$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$

$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \dots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \dots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$

$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \frac{\delta}{k}$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$\mathrm{P}(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$P\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$P\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$P\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) daje (ε, δ)-*aproksymacje* wartości V jeśli:

$$P(|X - V| \leqslant \varepsilon V) \geqslant 1 - \delta$$

Próbkowanie $\to$ Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki $(|\Omega(G_0)| = 2^n)$

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \frac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \frac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \frac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{|s_i - r_i| > \frac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \frac{\varepsilon}{2k} r_i\right)$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta}{k} = \delta$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \sum_{i=1}^{k} \tfrac{\delta}{k} = \delta$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) =$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \sum_{i=1}^{k} \tfrac{\delta}{k} = \delta$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{W}{|\Omega(G)|} \leqslant 1 + \varepsilon\right) =$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$P\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$P\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$P\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k \{|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^k P\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \sum_{i=1}^k \tfrac{\delta}{k} = \delta$$

$$P\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) =$$

$$P\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{W}{|\Omega(G)|} \leqslant 1 + \varepsilon\right) =$$

$$P\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1}{r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1} \leqslant 1 + \varepsilon\right) \geqslant$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \{|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^k \mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \sum_{i=1}^k \tfrac{\delta}{k} = \delta$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{W}{|\Omega(G)|} \leqslant 1 + \varepsilon\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1}{r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1} \leqslant 1 + \varepsilon\right) \geqslant$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{1 - \tfrac{\varepsilon}{2k} \leqslant \tfrac{s_i}{r_i} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon}{2k}\}\right) =$$

Próbkowanie $\to$ Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

$n =$ liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \{|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^k \mathrm{P}\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \sum_{i=1}^k \tfrac{\delta}{k} = \delta$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{W}{|\Omega(G)|} \leqslant 1 + \varepsilon\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1}{r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1} \leqslant 1 + \varepsilon\right) \geqslant$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{1 - \tfrac{\varepsilon}{2k} \leqslant \tfrac{s_i}{r_i} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon}{2k}\}\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \geqslant 1 - \delta \qquad \square$$

Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Chcemy: $G \xrightarrow{\text{poly}} (\varepsilon, \delta)$-aproksymacja $|\Omega(G)|$

Wejście: graf G, parametry ε, δ

n = liczba wierzchołków G

$e_1, \ldots, e_k$ – krawędzie G

$G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$

G_0 – same wierzchołki ($|\Omega(G_0)| = 2^n$)

$G_k = G$

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_k)|}{|\Omega(G_{k-1})|} \cdot \frac{|\Omega(G_{k-1})|}{|\Omega(G_{k-2})|} \cdot \ldots \cdot \frac{|\Omega(G_2)|}{|\Omega(G_1)|} \cdot \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \cdot |\Omega(G_0)|$$

$$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$$

potrzebujemy dobre przybliżenia r_i

jak dobre?

powiedzmy, że s_i przybliża r_i

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

Cel: Taka zmienna W, że

$$P\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta$$

Lemat:

jeśli mamy s_i, które jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W spełnia Cel.

Dowód: Z definicji dla każdego $i \in [k]$

$$P\left(|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) \geqslant 1 - \tfrac{\delta}{k}$$

$$P\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \tfrac{\delta}{k}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k \{|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^k P\left(|s_i - r_i| > \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\right) < \sum_{i=1}^k \tfrac{\delta}{k} = \delta$$

$$P\left(\left|\frac{W}{|\Omega(G)|} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right) =$$

$$P\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{W}{|\Omega(G)|} \leqslant 1 + \varepsilon\right) =$$

$$P\left(1 - \varepsilon \leqslant \frac{s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1}{r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1} \leqslant 1 + \varepsilon\right) \geqslant$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \{1 - \tfrac{\varepsilon}{2k} \leqslant \tfrac{s_i}{r_i} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon}{2k}\}\right) =$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \{|s_i - r_i| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2k} r_i\}\right) \geqslant 1 - \delta \qquad \square$$

Czyli wystarczy umieć aproksymować $\frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$ gdzie $H = H' + e$ dla pewnej krawędzi e.

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$

$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) na skończonej przestrzeni Ω daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\quad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) na skończonej przestrzeni Ω daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = \left|\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}\right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) na skończonej przestrzeni Ω daje ε-*jednostajną próbkę* Ω jeśli dla każdego $S \subset \Omega$

$$\left|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}\right| \leqslant \varepsilon$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\quad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Definicja:

Zmienna losowa X (randomizowany algorytm) na skończonej przestrzeni Ω daje ε*-jednostajną próbkę* Ω jeśli dla każdego $S \subset \Omega$

$$|\mathrm{P}(X \in S) - \frac{|S|}{|\Omega|}| \leqslant \varepsilon$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$

$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\quad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$P\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$E(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m E(X_i) =$$
$$= E([I \in \Omega(H)]) = P(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |P(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $E(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $P(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,
albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = \left|\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}\right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.
Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,
to $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy ($X_1, \ldots, X_m$) powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Twierdzenie 11.1 (Chernoff):

Niech $X_1, \ldots, X_m$ indykatory iid mające $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta)/\mu\varepsilon^2$,

to $\mathrm{P}(|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i - \mu| \geqslant \varepsilon\mu) \leqslant \delta$.

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$$P(|Y-\mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$P\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$P(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

$$P((1-\tfrac{\varepsilon'}{6})(1-\tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu}\cdot\tfrac{\mu}{R} \leqslant (1+\tfrac{\varepsilon'}{6})(1+\tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1-\delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$E(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m E(X_i) =$$
$$= E([I \in \Omega(H)]) = P(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = \left|P(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}\right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\tfrac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \tfrac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \tfrac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \tfrac{1}{3}$$

$$1 - \tfrac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3}$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$$P(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$P(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$P\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$P((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$P(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$P\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$E(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m E(X_i) =$$
$$= E([I \in \Omega(H)]) = P(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

m jest wielomianowe od wejścia!

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |P(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$

$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

$$\mathrm{P}((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

m jest wielomianowe od wejścia!

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Podsumowanie: Próbkowanie → Zliczanie

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\tfrac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

m jest wielomianowe od wejścia!

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \tfrac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \tfrac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \tfrac{1}{3}$$

$$1 - \tfrac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3}$$

Podsumowanie: Próbkowanie → Zliczanie

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n \qquad r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

$$\mathrm{P}((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu}\cdot\tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\tfrac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

m jest wielomianowe od wejścia!

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3}$ $\qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$

$$1 - \tfrac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3}$$

Podsumowanie: Próbkowanie → Zliczanie

$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$

$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$

$r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}(X_i) =$$
$$= \mathrm{E}([I \in \Omega(H)]) = \mathrm{P}(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

$$\mathrm{P}((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

m jest wielomianowe od wejścia!

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |\mathrm{P}(I \in \Omega(H)) - \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \frac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \frac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \frac{\mu}{R} \leqslant 1 + \frac{2\varepsilon'}{3}$$

Podsumowanie: Próbkowanie → Zliczanie

$$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n \qquad r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

$$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$$

jeśli s_i, jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W dobre

Zakładamy: $H \xrightarrow{\text{poly}} \varepsilon$-jednostajna próbka $\Omega(H)$

z Tw jeśli $m \geqslant 3\ln(2/\delta')/\mu(\varepsilon'/6)^2$,

albo słabiej $m \geqslant 9\ln(2/\delta')/(\varepsilon'/6)^2$,

Wejście: grafy H, H', gdzie $H = H' + e$ i parametry $\varepsilon' = \varepsilon/2k, \delta' = \delta/k$

$R = \frac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}$

Cel2: Taka zmienna Y, że

$$P\left(\left|\frac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

$$P(|Y - \mu| \geqslant \tfrac{\varepsilon'}{6}\mu) \leqslant \delta'$$

$$P(1 - \tfrac{\varepsilon'}{6} \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{6}) \geqslant 1 - \delta'$$

wiele razy $(X_1, \ldots, X_m)$ powtarzamy:

bierzemy $\varepsilon'/3$-jednostajnie zbiór $I \in \Omega(H')$

$X_i = [I \in \Omega(H)]$

$Y = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i$

$$E(Y) = \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^m E(X_i) =$$
$$= E([I \in \Omega(H)]) = P(I \in \Omega(H)) =: \mu$$

$$P((1 - \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3}) \leqslant \tfrac{Y}{\mu} \cdot \tfrac{\mu}{R} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon'}{6})(1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3})) \geqslant 1 - \delta'$$

$$P(1 - \varepsilon' \leqslant \tfrac{Y}{R} \leqslant 1 + \varepsilon') \geqslant 1 - \delta'$$

$$P\left(\left|\tfrac{Y}{R} - 1\right| \leqslant \varepsilon'\right) \geqslant 1 - \delta'$$

m jest wielomianowe od wejścia!

nie jest to dokładnie schemat z poczatku (przybliżenie!)

$R \geqslant \frac{1}{2}$ (dodając krawędź zabijamy zbiory z elementami w obu końcach, ale zawsze możemy usunąć jeden element)

$$|\mu - R| = |P(I \in \Omega(H)) - \tfrac{|\Omega(H)|}{|\Omega(H')|}| \leqslant \tfrac{\varepsilon'}{3} \qquad \mu \geqslant \tfrac{1}{3}$$

$$1 - \tfrac{\varepsilon'}{3R} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{\varepsilon'}{3R}$$

$$1 - \tfrac{2\varepsilon'}{3} \leqslant \tfrac{\mu}{R} \leqslant 1 + \tfrac{2\varepsilon'}{3}$$

Podsumowanie: Próbkowanie → Zliczanie

$|\Omega(G)| = r_k \cdot r_{k-1} \cdot \ldots \cdot r_2 \cdot r_1 \cdot 2^n$ $\qquad r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$

$W = s_k \cdot s_{k-1} \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1 \cdot 2^n$

jeśli s_i, jest $(\varepsilon/2k, \delta/k)$-aproksymacją r_i to W dobre

s_i otrzymujemy za pomocą założonego FPAUS

jak wyżej

Skąd brać próbki?

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

   v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

    v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

        jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \setminus \{v\}$

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

    v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

        jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \setminus \{v\}$

        jeśli $v \notin X_i$ to

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

    v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

    jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \setminus \{v\}$

    jeśli $v \notin X_i$ to

    jeśli $X_i \cup \{v\}$ to zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

    v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

    jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \backslash \{v\}$

    jeśli $v \notin X_i$ to

    jeśli $X_i \cup \{v\}$ to zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$

    jeśli $X_i \cup \{v\}$ to nie jest zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i$

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

   v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

   jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \setminus \{v\}$

   jeśli $v \notin X_i$ to

   jeśli $X_i \cup \{v\}$ to zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$

   jeśli $X_i \cup \{v\}$ to nie jest zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i$

Rozkład stacjonarny istnieje i jest jednostajny!

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\dots X_m \dots X_{2m} \dots X_{3m} \dots X_{4m} \dots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

   v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

   jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \setminus \{v\}$

   jeśli $v \notin X_i$ to

   jeśli $X_i \cup \{v\}$ to zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$

   jeśli $X_i \cup \{v\}$ to nie jest zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i$

Rozkład stacjonarny istnieje i jest jednostajny!
A jakie trzeba wziąc m w 3?

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

   v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

   jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \setminus \{v\}$

   jeśli $v \notin X_i$ to

   jeśli $X_i \cup \{v\}$ to zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$

   jeśli $X_i \cup \{v\}$ to nie jest zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i$

Rozkład stacjonarny istnieje i jest jednostajny!
A jakie trzeba wziąc m w 3?
Okazuje się to zaskakująco trudne pytanie.

Skąd brać próbki?

Łańcuchy Markova?

1. Mamy dany (skomplikowany) rozkład π
2. Wymyślamy łańcuch Markova, gdzie π to rozkład stacjonarny
3. Znajdujemy takie m, że po m krokach łańcucha jesteśmy wystarczająco blisko π
4. $\ldots X_m \ldots X_{2m} \ldots X_{3m} \ldots X_{4m} \ldots$ to nasza próbka

Jednostajne próbkowanie zbiorów niezależnych w G?

MInd 1

1. Wybieramy dowolny zbiór początkowy X_0
2. Aby obliczyć X_{i+1}:

    v jednostajnie wybrany wierzchołek z G

    jeśli $v \in X_i$ to $X_{i+1} = X_i \backslash \{v\}$

    jeśli $v \notin X_i$ to

    jeśli $X_i \cup \{v\}$ to zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i \cup \{v\}$

    jeśli $X_i \cup \{v\}$ to nie jest zbiór niezależny to $X_{i+1} = X_i$

Rozkład stacjonarny istnieje i jest jednostajny!
A jakie trzeba wziąc m w 3?
Okazuje się to zaskakująco trudne pytanie.

Dlatego rozważymy inny łańuch i dodamy założenia...

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$p = 1 \longrightarrow$

$p = 2 \longrightarrow$

$p = 3 \longrightarrow$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow$$

$$p = 3 \longrightarrow$$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow$$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$ nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$ dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t))$$

Path coupling

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t))$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Path coupling

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$ nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$ dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t $\qquad$ niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Path coupling

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$ nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$ dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t $\qquad$ niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t ”ścieżką”

$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

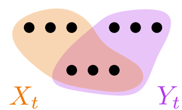
Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

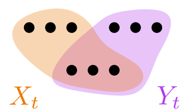
Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$$X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$$

$$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$$



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

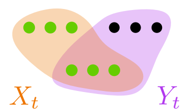
Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką" $X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$



Path coupling

$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

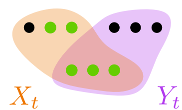
Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

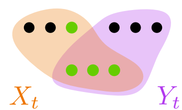
Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \backslash \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \backslash \{x_1, x_2\}$



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

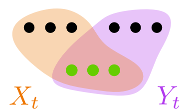
Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką" $X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \backslash \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \backslash \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$



$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

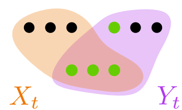
Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \setminus \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$



Path coupling

$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$E(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $E(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

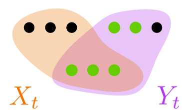
Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \setminus \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$E(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $E(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

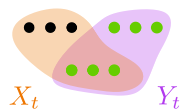
Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \backslash \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \backslash \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\ldots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$



$I\Delta J = (I\backslash J) \cup (J\backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I\backslash\{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I\backslash\{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I\backslash\{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I)\Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

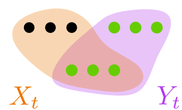
Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką" $X_t\backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t\backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t\backslash\{x_1\}$
$Z_2 = X_t\backslash\{x_1, x_2\}$
$\cdots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\cdots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$



Path coupling

$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

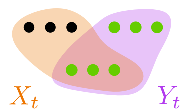
Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką" $X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \setminus \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\ldots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$

Więc $\mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant 1$



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańcuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

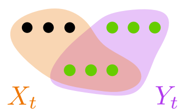
$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \backslash \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \backslash \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\ldots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$

Więc $\mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant 1$

$d_{t+1} = |X_{t+1} \Delta Y_{t+1}|$



$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t $\qquad$ niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$$X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$$

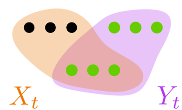
$$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \setminus \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\ldots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$

Więc $\mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant 1$

$$d_{t+1} = |X_{t+1} \Delta Y_{t+1}|$$
$$= |K(X_t) \Delta K(Y_t)|$$



Path coupling

$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$
nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$
dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$$X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$$

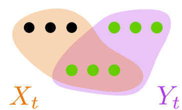
$$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \setminus \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\ldots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$

Więc $\mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant 1$

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= |X_{t+1} \Delta Y_{t+1}| \\ &= |K(X_t) \Delta K(Y_t)| \\ &= |K(Z_0) \Delta K(Z_{d_t})| \end{aligned}$$



$I \Delta J = (I \backslash J) \cup (J \backslash I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$ nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$ dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką"

$$X_t \backslash Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$$

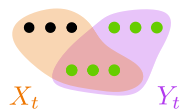
$$Y_t \backslash X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$$

$Z_0 = X_t$
$Z_1 = X_t \backslash \{x_1\}$
$Z_2 = X_t \backslash \{x_1, x_2\}$
$\ldots$
$Z_r = X_t \cap Y_t$
$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$
$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$
$\ldots$
$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$

Więc $\mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant 1$

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= |X_{t+1} \Delta Y_{t+1}| \\ &= |K(X_t) \Delta K(Y_t)| \\ &= |K(Z_0) \Delta K(Z_{d_t})| \\ &\leqslant \textstyle\sum_{i=1}^{d_t} |K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)| \end{aligned}$$



$I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$

Path coupling

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Cel: FPAUS dla $\Omega(G)$

Plan: Łańcuch Markova na $\Omega(G)$ z π jednostajnym

Pokażemy, że zbiega szybko do π.

Mając dany zbiór $I \in \Omega(G)$ definiujemy *krok* z I.

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Mając $I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$ nie powinno być trudno porównać $K_e^p(I)$ z $K_e^p(J)$ dla e, p wylosowanych jednostajnie.

faktycznie, analizując przypadki pokażemy, że

$$\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$$

Chcemy użyć sprzęgania łańcuchów

Niech (X_t, Y_t) łańcuchem takim, że losujemy e_t, p_t jednostajnie

$$(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (K_{e_t}^{p_t}(X_t), K_{e_t}^{p_t}(Y_t)) \qquad d_t = |X_t \Delta Y_t|$$

Łańuch $(X_t)_t$ ma rozkład stacjonarny jednostajny

Wystarczy pokazać, że $\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant d_t$

Rozważmy przypadki jakie jest d_t niech $K = K_{e_t}^{p_t}$

Jeśli $d_t = 0$ to $X_t = Y_t$, więc $X_{t+1} = Y_{t+1}$

Jeśli $d_t = 1$ to $|X_t \Delta Y_t| = 1$, a ten przypadek już zrobiliśmy

Jeśli $d_t > 1$ to łączymy X_t z Y_t "ścieżką" $X_t \setminus Y_t = \{x_1, \ldots, x_r\}$

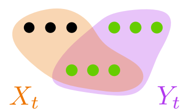
$Y_t \setminus X_t = \{y_1, \ldots, y_s\}$

$$Z_0 = X_t$$
$$Z_1 = X_t \setminus \{x_1\}$$
$$Z_2 = X_t \setminus \{x_1, x_2\}$$
$$\ldots$$
$$Z_r = X_t \cap Y_t$$
$$Z_{r+1} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1\}$$
$$Z_{r+2} = (X_t \cap Y_t) \cup \{y_1, y_2\}$$
$$\ldots$$
$$Z_{r+s} = Z_{d_t} = Y_t$$

Mamy $|Z_{i-1} \Delta Z_i| = 1$

Więc $\mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant 1$

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= |X_{t+1} \Delta Y_{t+1}| \\ &= |K(X_t) \Delta K(Y_t)| \\ &= |K(Z_0) \Delta K(Z_{d_t})| \\ &\leqslant \textstyle\sum_{i=1}^{d_t} |K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)| \end{aligned}$$



$$\mathrm{E}(d_{t+1} \mid d_t) \leqslant \textstyle\sum_{i=1}^{d_t} \mathrm{E}(|K(Z_{i-1}) \Delta K(Z_i)|) \leqslant d_t$$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

Dowód:

Niech $e = uv$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \ I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \ I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$

II. $|N(u) \cap I| = 1$

III. $|N(u) \cap I| = 0$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \; I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \; I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \; I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

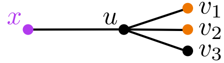
Dowód:

Niech $e = uv$

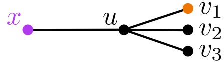
Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

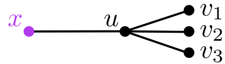
I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



II. $|N(u) \cap I| = 1$



III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u,v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

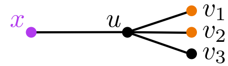
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

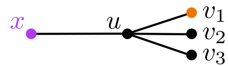
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$

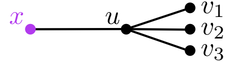


w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

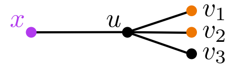
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

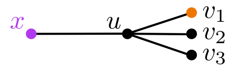
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



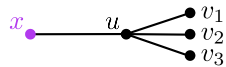
w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

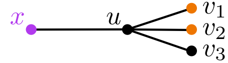
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

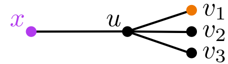
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$

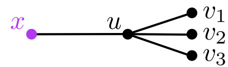


jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to

jeśli $v = v_1$ to

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

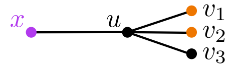
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

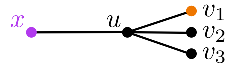
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$

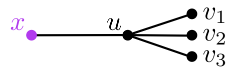


jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1, 2\} \rightarrow D = 0$

jeśli $v = v_1$ to

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

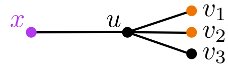
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

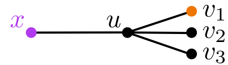
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



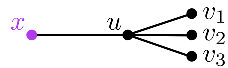
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1, 2\} \to D = 0$

$p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \setminus \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \setminus \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \setminus \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

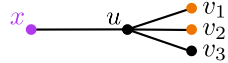
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

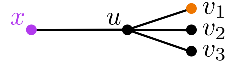
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



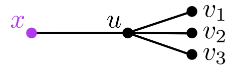
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1, 2\} \to D = 0$

$\quad p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1, 2\} \to D = 1$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$

$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$

$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

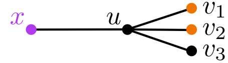
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

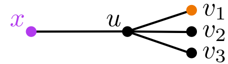
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

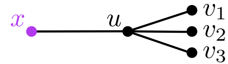
jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1,2\} \rightarrow D = 0$

$p = 3 \rightarrow D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1,2\} \rightarrow D = 1$

$p = 3 \rightarrow D = 3$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

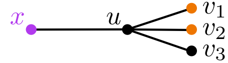
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

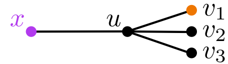
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



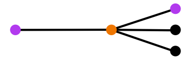
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1, 2\} \rightarrow D = 0$

$p = 3 \rightarrow D = 1$

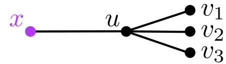
jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1, 2\} \rightarrow D = 1$

$p = 3 \rightarrow D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

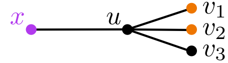
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

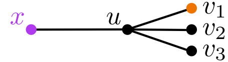
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



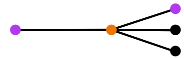
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $p \in \{1,2\} \rightarrow D = 0$

$p = 3 \rightarrow D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $p \in \{1,2\} \rightarrow D = 1$

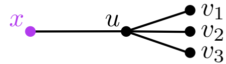
$p = 3 \rightarrow D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 1$$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1, 2, 3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

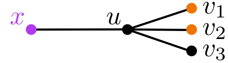
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

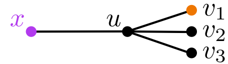
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



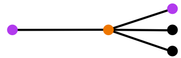
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1, 2\} \to D = 0$

$p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1, 2\} \to D = 1$

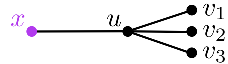
$p = 3 \to D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 1$$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



jeśli $v = x$ to $D = 0$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

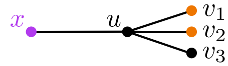
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

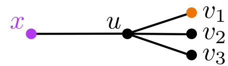
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



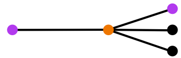
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1,2\} \to D = 0$

$p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1,2\} \to D = 1$

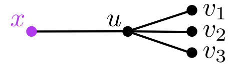
$p = 3 \to D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 1$$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



jeśli $v = x$ to $D = 0$

jeśli $v = v_i$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

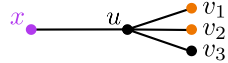
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

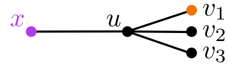
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



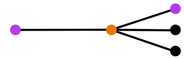
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $p \in \{1,2\} \to D = 0$

$p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $p \in \{1,2\} \to D = 1$

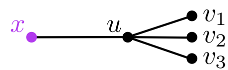
$p = 3 \to D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 1$$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



jeśli $v = x$ to $D = 0$

jeśli $v = v_i$ $\quad p \in \{1,2\} \to D = 1$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

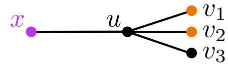
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

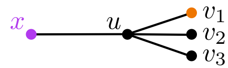
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



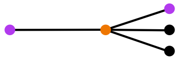
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $p \in \{1,2\} \to D = 0$

$p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $p \in \{1,2\} \to D = 1$

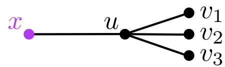
$p = 3 \to D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 1) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 3) = 1$$

III. $|N(u) \cap I| = 0$



jeśli $v = x$ to $D = 0$

jeśli $v = v_i$ $p \in \{1,2\} \to D = 1$

$p = 3 \to D = 2$

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u, v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

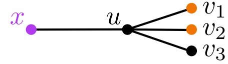
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

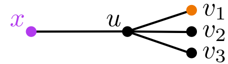
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



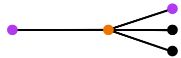
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1,2\} \to D = 0$

$p = 3 \to D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1,2\} \to D = 1$

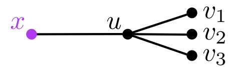
$p = 3 \to D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 1) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 3) = 1$$

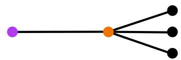
III. $|N(u) \cap I| = 0$



jeśli $v = x$ to $D = 0$

jeśli $v = v_i \quad p \in \{1,2\} \to D = 1$

$p = 3 \to D = 2$



(bo $K(I) = I \cup \{u\}$ i $K(J) = J$)

Wejście: graf G z $\Delta(G) \leqslant 4$

Dla krawędzi $e = uv$ w G i $p \in \{1,2,3\}$

$$p = 1 \longrightarrow \quad I' = I \backslash \{u,v\}$$

$$p = 2 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{u\}) \cup \{v\}$$

$$p = 3 \longrightarrow \quad I' = (I \backslash \{v\}) \cup \{u\}$$

Jeśli $I' \in \Omega(G)$ to $K_e^p(I) = I'$, wpp $K_e^p(I) = I$.

Lemat:

$I, J \in \Omega(G)$ takie, że $J = I \cup \{x\}$

e, p losowane jednostajnie,

wtedy $\mathrm{E}(|K_e^p(I) \Delta K_e^p(J)|) \leqslant 1$

$K = K_{e_t}^{p_t}$

$D = |K(I) \Delta K(J)|$

chcemy $\mathrm{E}(D) \leqslant 1$

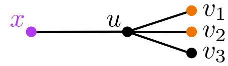
Dowód:

Niech $e = uv$

Jeśli $u, v \notin N(x)$ to $D = 1$

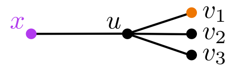
Załóżmy więc, że $u \in N(x)$

I. $|N(u) \cap I| \geqslant 2$



w każdym przypadku $D \leqslant 1$

II. $|N(u) \cap I| = 1$



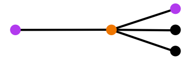
jeśli $v \in \{v_2, v_3\}$ to $D = 1$

jeśli $v = x$ to $\quad p \in \{1,2\} \rightarrow D = 0$

$p = 3 \rightarrow D = 1$

jeśli $v = v_1$ to $\quad p \in \{1,2\} \rightarrow D = 1$

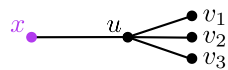
$p = 3 \rightarrow D = 3$



(bo $K(I) = I \cup \{u\} \backslash \{v_1\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_1\}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 1) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 3) = 1$$

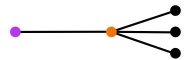
III. $|N(u) \cap I| = 0$



jeśli $v = x$ to $D = 0$

jeśli $v = v_i \quad p \in \{1,2\} \rightarrow D = 1$

$p = 3 \rightarrow D = 2$



(bo $K(I) = I \cup \{u\}$ i $K(J) = J$)

$$\mathrm{E}(D \mid e \in \{ux, uv_i\}) \leqslant \tfrac{1}{\Delta} \cdot 0 + \tfrac{\Delta - 1}{\Delta}(\tfrac{2}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 2) = \tfrac{\Delta - 1}{\Delta} \cdot \tfrac{4}{3} \leqslant 1$$

Dziękuję za uwagę!